Actes de la XIX Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. Barcelona, SCHCT-IEC
Ferragud, C.; Massa-Esteve, M. R. (ed.) (2023) p. 101-107
DOI: 10.2436/10.2006.05.13

I SI FEM UN ZOOM I MIREM LA RECTA NUMÈRICA?

FÀTIMA ROMERO VALLHONESTA
CENTRE PER A LA RECERCA DE LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Paraules clau: *nombres irracionals, educació secundària obligatòria, textos històrics.*

Zooming in on the number line

Summary: *Many types of numbers are represented on the number line, but we need a very powerful lens to zoom in the irrational ones. Irrational numbers are covered in the 4th year of the Catalan curriculum of compulsory secondary education, in the "Numbering and Calculation" block, and reference is made, above all, to approximations to these numbers. One of the related topics is "History of Mathematics: Methods for Calculating Square Root Approximations". In this paper we will look at some historical texts concerning irrational numbers and make suggestions for their use in the classroom. The idea is that the study of the methods used by various authors to approach them in the past will help students to grasp the complex nature of these numbers.*

Key words: *irrational numbers, compulsory secondary education, historical texts.*

Introducció[1]

En el currículum dels diferents cursos de l'ensenyament secundari obligatori, hi trobem ítems que fan referència explícita a la història de les matemàtiques. A tall d'exemple, en els continguts corresponents a segon curs, dins del bloc «Estadística i atzar», hi trobem: «Història dels jocs d'atzar en diferents cultures». Aquests tipus de continguts no se solen trobar desenvolupats en els llibres de text, només algunes vegades s'hi fa referència en notes al marge que expliquen anècdotes més que continguts. Els membres del grup d'història d'ABEAM[2] hem desenvolupat la

1. Aquest treball s'inclou en el projecte PID2020-113702RB-I00 (Matemáticas, Ingeniería y Patrimonio: Nuevos Retos y Prácticas, XVI-XX) del Ministeri de Ciència i Innovació.

2. Associació de Barcelona per a l'Estudi i l'Aprenentatge de les Matemàtiques.

majoria d'aquests ítems per tal de facilitar al professorat no expert en història de les matemàtiques la seva implementació a l'aula. Es tracta que els alumnes aprenguin conceptes matemàtics a partir del context on es van produir o desenvolupar. D'aquesta manera, es contribueix que els alumnes no vegin les matemàtiques com un producte acabat, sinó com una disciplina en contínua evolució. Alguns d'aquests continguts no els tenim desenvolupats encara, com és el cas del que fa referència als nombres irracionals.

Les quantitats irracionals van trigar molt a ser acceptades com a nombres i tenen una història molt interessant. Apareixen en situacions molt diverses relacionades amb mesures, construccions geomètriques o resolució d'equacions, per exemple. Són bàsiques també per entendre la construcció de l'escala musical temperada, de manera que permeten establir connexions entre diferents parts de la matemàtica i amb altres disciplines, tal com es recomana en el currículum. No tots els textos són apropiats per treballar amb els alumnes, per interessants que els trobem des d'un punt de vista històric (Romero Vallhonesta i Massa-Esteve, 2015) i, per tant, la tria dels textos és clau.

En aquest article donarem algunes referències històriques pel que fa a les arrels quadrades, analitzarem les aproximacions de Bombelli a $\sqrt{13}$ i les relacionarem amb les fraccions contínues, el germen de les quals el podem trobar als *Elements* d'Euclides (300 aC). Finalment, i per connectar amb altres disciplines, parlarem de la construcció de les escales musicals i farem referència al *Vande Spiegheling der Singconst* de Simon Stevin, obra que va sobreviure en forma de manuscrit fins al 1884, quan es va publicar.

Els nombres irracionals al currículum de l'educació secundària obligatòria

Al currículum de l'ESO trobem els nombres irracionals al 4t curs, però només es fa referència als algebraics i especialment a les arrels quadrades. Els continguts que hi estan relacionats són al bloc de «Numeració i càlcul» amb els ítems següents:

— Nombres racionals i irracionals. Necessitat dels nombres irracionals.

— Aproximació per excés i per defecte.

— Representació gràfica sobre la recta.

— Operacions: potències d'exponent fraccionari, relació amb el càlcul amb radicals en la resolució d'equacions.

— Recursos digitals per a la realització i comprovació de càlculs numèrics.

— Càlcul mental: estimació i estratègies de càlcul.

— Història de les matemàtiques: mètodes per calcular aproximacions d'arrels quadrades.

Algunes referències històriques remarcables

Els pitagòrics (VI aC) pensaven que els nombres enters eren la mesura de totes les coses, que els fenòmens de l'univers es podien expressar mitjançant nombres enters o les seves raons. Per això els va trasbalsar el fet d'adonar-se que la raó entre la diagonal d'un quadrat i un costat no es podia expressar mitjançant nombres enters. A aquestes raons no expressables amb nombres enters, les van anomenar *incommensurables* i als «nombres» que les expressaven, *irracionals*.

A l'antiga Mesopotàmia havien trobat aproximacions de nombres irracionals com la $\sqrt{2}$, però desconeixien que les aproximacions mai podien arribar a ser exactes. Hi ha documents que testimonien que s'estava abordant el càlcul d'arrels quadrades també pels indis, els xinesos, els grecs i els àrabs, però, en la majoria dels casos, aquests testimonis escrits proporcionen els valors de les arrels

considerades, sense, tanmateix, il·lustrar els mètodes i càlculs realitzats per obtenir-les. De tota manera, fins i tot fonts d'aquest tipus podien donar informació útil i interessant (Rivolo i Simi, 1998). És el cas, per exemple, de la tauleta YBC 7289 d'argila de l'època de l'antiga Babilònia (aproximadament entre el 1800 i el 1600 aC) de la col·lecció de la Universitat de Yale. Matemàticament parlant, aquest document del segon mil·lenni aC és una de les tauletes d'argila existents més interessants perquè conté no només una il·lustració que és un quadrat amb les seves diagonals, sinó també, en el seu text, una estimació numèrica de $\sqrt{2}$ amb una precisió de tres decimals (Fowler i Robson, 1998).

En el quart capítol dels *Nou capítols sobre l'art matemàtica* (206 aC - 221 dC) (Chemla i Shuchun, 2005) es tracten les divisions i les extraccions d'arrels. Els problemes d'aquest capítol presenten una unitat temàtica. Cada enunciat proporciona l'àrea o el volum d'un objecte geomètric i demana determinar-ne la dimensió: un costat si és un rectangle, un quadrat o un cub; la circumferència o el diàmetre, si és un cercle o una esfera. És en aquest capítol on trobem la primera descripció coneguda d'una regla per extreure l'arrel quadrada, de manera que es determinen els dígits de l'arrel un darrere l'altre, amb un mètode comparable al que s'havia ensenyat a les escoles, a partir de la relació: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, la demostració geomètrica de la qual es troba als *Elements* d'Euclides.

Bombelli i la seva *Algebra*

No se sap gaire cosa de la vida de Rafael Bombelli (1526 - *ca.* 1572). Va ser un enginyer i arquitecte implicat en la recuperació dels aiguamolls i la construcció de ponts. No hi ha constància que estudiés en una universitat, però evidentment era un home erudit, tant és així que des de la Universitat de Roma se'l va convidar a col·laborar en una traducció de les obres de Diofant. La redacció de l'esborrany manuscrit de l'*Algebra*, l'única publicació coneguda de Bombelli, va tenir lloc durant una llarga pausa en la recuperació del pantà de la Val di Chiana. El 1572, Bombelli duia a la impremta els tres primers llibres de la seva *Algebra*, que es publicaven a Venècia amb l'anunci que en seguirien dos llibres més. Pocs mesos després, Bombelli moria i aquests dos llibres no veurien la llum. No obstant, el matemàtic italià Ettore Bortolotti (1866-1947) va descobrir, el 1923, els manuscrits de Bombelli en una llibreria de Bolonya. Juntament amb la versió manuscrita dels tres primers llibres, hi havia l'esborrany dels altres dos llibres, que Bortolotti va fer publicar el 1929. El text que proposem per portar a l'aula és del llibre primer que tracta de les successives extensions dels nombres i de la racionalitat. A Bombelli (1572: 37-39) s'expliquen els passos que s'han de fer per «formar el trencat en l'extracció de l'arrel quadrada», és a dir, per calcular l'arrel aproximada dels nombres no quadrats a partir d'aproximacions successives amb fraccions. Després justifica els passos que ha fet, utilitzant àlgebra.

Els passos que segueix són els següents:

— $13 = 3^2 + 4$ i, per tant, el 3 seria una primera aproximació per defecte a $\sqrt{13}$.

— Es divideix, aleshores, el 4 $(13 - 3^2)$ pel doble de l'arrel, 6, i la fracció $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ s'afegeix a 3, i s'obté $3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$.

— $\left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{121}{9} = 13 + \frac{4}{9}$, de manera que tenim ara una aproximació per excés.

— Si ens hi volem aproximar més, al doble de 3 se li afegeixen els $\frac{2}{3}$ i obtindrem $\frac{20}{3}$. Aleshores, es divideix 4 (la diferència entre 9 i 13) entre aquesta fracció i s'obté: $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. S'afegeixen ara aquests $\frac{3}{5}$

a 3 i s'obté $\frac{18}{5}$, que elevat al quadrat és $\frac{324}{25} = 12 + \frac{24}{25}$, de manera que s'obté ara una aproximació per defecte, però més propera a $\sqrt{13}$ que la primera.

— El pas següent és afegir a 6 els $\frac{3}{5}$, i s'obté $\frac{33}{5}$. Dividim 4 entre aquests $\frac{33}{5}$ i obtenim $\frac{20}{33}$.

— Els afegim a 3 i fem el quadrat i obtenim $13 + \frac{4}{1089}$, una altra aproximació per excés i més propera a $\sqrt{13}$ que les anteriors.

— Seguint aquest mètode, obté l'aproximació per defecte: $12 + \frac{11877}{11881}$ i l'aproximació per excés: $13 + \frac{4}{1413721}$.

Acaba dient «e così procedendo si può approssimare a una cosa insensibile». És a dir que, procedint d'aquesta manera, ens podem acostar a l'arrel tant com vulguem. És important que els alumnes s'adonin que les expressions decimals dels nombres irracionals són sempre aproximacions, tot i que ens hi podem acostar tant com vulguem en funció de la precisió que necessitem en els nostres càlculs.

Una mica més endavant, Bombelli (1572: 39) torna a trobar aquestes aproximacions per excés i defecte a $\sqrt{13}$, però ara amb àlgebra:

> Suposem, per tant, que s'ha de trobar el costat més proper[3] a 13, al qual el quadrat més proper és 9, el costat del qual és 3; però suposem que el costat més proper a 13 sigui 3 + 1 tanto;[4] el seu quadrat serà 9 + 6 tanti + 1 potenza,[5] que ha de ser igual a 13. Si traiem 9 a cada costat, tindrem que 4 és igual a 6 tanti + 1 potenza.[6]

En llenguatge actual ho expressaríem així:

— $\sqrt{13} = 3 + x$

— $13 = 9 + 6x + x^2$

— $4 = 6x + x^2$

Aleshores, com que x és una quantitat petita menor que la unitat, x^2 és més petita encara i no la té en compte. Segueix, doncs:

— $4 = 6x + x^2$

— $4 = 6x \rightarrow x = \frac{2}{3}$

— Si x val $\frac{2}{3}$, aleshores $x^2 = \frac{2}{3}x$

— Si anem a la 1a equació: $4 = 6x + \frac{2}{3}x$

— $x = \frac{4}{6 + \frac{2}{3}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. Aleshores $3 + x$ serà $3 + \frac{3}{5}$

3. Aquí Bombelli fa referència al costat d'un quadrat d'àrea 13 i, com que no el podrà trobar exactament, buscarà el més proper.
4. És com es refereix Bombelli a la incògnita.
5. És com es refereix Bombelli al quadrat de la incògnita.
6. En el text original: «Pongasi dunque che si habbia a trovare il lato prossimo di 13, di cui il più prossimo quadrato è 9, di cui il lato è 3; però pongo che il lato prossimo di 13 sia 3 + 1 tanto, e il suo quadrato è 9 + 6 tanti + 1 potenza, il qual'è eguale a 13, che levato 9 a ciascuna delle parti, resta 4, eguale a 6 tanti + 1 potenza» (traducció al català de l'autora).

— Si x val $\frac{3}{5}$, aleshores $x^2 = \frac{3}{5}x$ i tindrem $4 = 6x + \frac{3}{5}x$ i $x = \dfrac{4}{6 + \frac{3}{5}}$

Fixem-nos que Bombelli ha establert un procediment recursiu $\left(x \to \dfrac{4}{6+x}\right)$ que convergeix a $\sqrt{13}$. Aquest procediment, tot i que Bombelli no en parli, ens porta a la fracció contínua:

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \dots\dots}}}}$$

De fet, qui va ser el que en podríem dir descobridor de les fraccions contínues va ser Pietro Antonio Cataldi (1548-1626). Cataldi va seguir el mateix mètode que Bombelli per extreure arrels quadrades, però va ser el primer a desenvolupar un simbolisme per a les fraccions contínues i a donar algunes de les seves propietats (Brezinski, 1991: 65). No serà, però, fins *De fractionibus continuis dissertatio* de 1737 de Leonhard Euler (1707-1783) on trobem per primera vegada l'exposició del sistema de fraccions contínues ordinàries i les seves propietats més importants.

El germen de les fraccions contínues: *Elements* (VII, II)

Com ja hem comentat, la naturalesa dels irracionals és difícil de copsar per part de l'alumnat. Si es parla de fraccions contínues, es pot aprofitar per explicar que els racionals també admeten representació amb aquests tipus de fraccions, però, en aquest cas, són finites. Una de les maneres de trobar aquestes expressions és a partir de l'algorisme d'Euclides (Heath, 1908) per trobar el màxim comú divisor (mcd) de dos nombres. Considerem, per exemple, la fracció $\frac{72}{19}$. Efectuarem la divisió entera $72 = 3 \cdot 19 + 15$ i anirem fent divisions successives en les quals el divisor d'una passa a ser el dividend de la següent i el residu d'una passa a ser el divisor de la següent.

$19 = 1 \cdot 15 + 4$

$15 = 3 \cdot 4 + 3$

$4 = 1 \cdot 3 + 1$

$3 = 3 \cdot 1 + 0$

Aturem el procés quan el residu sigui 0.[7] Aleshores, a partir de les igualtats, podem expressar $\frac{72}{19}$ com a fracció contínua.

$$\frac{72}{19} = 3 + \frac{15}{19} = 3 + \frac{1}{\frac{19}{15}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{4}{15}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{15}{4}}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{3}{4}}} =$$

$$= 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{4}{3}}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}$$

7. Aleshores el penúltim residu seria el màxim comú divisor dels dos nombres.

La construcció de les escales musicals

La història de l'escala temperada es remunta aproximadament al 335 aC i sembla que té el seu origen en una obra d'Aristoxen de Tàrent, alumne d'Aristòtil, *Elements harmònics*, considerada la primera obra grega de teoria musical. Aristoxen va idear una sèrie contínua d'intervals musicals que va representar una ruptura dràstica amb les proporcions discretes de Pitàgores.

Aquestes idees les va recollir Vincenzo Galilei (1520-1591) en el seu *Dialogo della musica antica e della moderna* (1581), qui va proposar dividir l'octava en dotze semitons iguals. Van treballar també en aquest tema Zhu Zaiyu (1536-1611), un príncep xinès, i també Simon Stevin (1548-1620), Descartes (1596-1650) o Marin Mersenne (1588-1648) en la seva *Harmonie universelle* de 1636.

L'interès per les escales musicals no va ser un interès casual d'uns quants científics individuals. Més aviat, reflecteix una preocupació contínua dels científics des de l'època pitagòrica en endavant per resoldre certs problemes quantificables en teoria musical. Una de les qüestions implicades es coneixia tècnicament com *la divisió de l'octava*, és a dir, amb quines notes s'havia de fer la música (Maor, 2018).

Les contribucions de Stevin a la música es troben a *Vande Spiegheling der Singconst*, que, com hem dit, va sobreviure en forma de manuscrit fins a la seva publicació el 1884. En general, aquesta es considera la primera teoria correcta de la divisió de l'octava en dotze intervals iguals (Forbes, Fokker i Romein-Verschoor, 1966).

El temperament és un sistema d'afinació i, quan parlem d'escala temperada, ens referim a un sistema en el qual cada parell de notes adjacents tenen freqüències que guarden la mateixa proporció. A mitjan segle XIX aquest sistema es va convertir en el d'afinació estàndard de la música occidental.

La freqüència d'una nota és el doble que la de la mateixa nota de l'octava anterior. Si hem de dividir en 12 parts (per les 12 notes de l'octava) les freqüències corresponents, tindrem la progressió geomètrica:

$$1,\ \sqrt[12]{2},\ (\sqrt[12]{2})^2,\ (\sqrt[12]{2})^3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ (\sqrt[12]{2})^{11},\ (\sqrt[12]{2})^{12} = 2$$

Algunes remarques

La utilització de la història de les matemàtiques a l'aula pot contribuir que els alumnes que acaben la secundària tinguin una idea més real de les matemàtiques, que contrasta amb la que tenen a vegades d'una sèrie d'algorismes per resoldre problemes. En el cas dels nombres irracionals, creiem que és important que en copsin la naturalesa. El text de Bombelli mostra clarament la manera d'aproximar-se a $\sqrt{13}$, primer a partir d'unes instruccions i després amb una justificació algebraica. Les fraccions contínues que s'intueixen a l'obra de Bombelli juntament amb l'algorisme d'Euclides poden servir per comparar els racionals i els irracionals en les seves expressions com a fraccions contínues, de manera que es reforça el concepte de *nombre irracional*. Finalment, el fet que les proporcions entre les freqüències de les notes de l'escala temperada depenguin d'un nombre irracional, com és $\sqrt[12]{2}$, mostra la importància d'aquests nombres i de les matemàtiques en general, que ens donen eines per respondre preguntes sobre el món que ens envolta.

Referències bibliogràfiques

Bombelli, R. (1572). *L'algebra: Parte maggiore dell'arimetica*. Bolonya: Giovanni Rossi.

Brezinski, C. (1991). *History of continued fractions and padé approximants*. Berlín: Springer-Verlag.

Chemla, K.; Shuchun, G. (ed.) (2005). *Les neuf chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. París: Dunod. [Edició crítica bilingüe]

Forbes, R. J.; Fokker, A. D.; Romein-Verschoor, A. (ed.) (1966). *The principal works of Simon Stevin*. Vol. V: *Engineering, music, civic life*. Amsterdam: Swets & Zeitlinger.

Fowler, D.; Robson, E. (1998). «Square root approximations in old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context». *Historia Mathematica*, 25, p. 366-378.

Heath, T. L. (1908). *Euclid: The thirteen books of the Elements*. Vol. II. Londres: Cambridge University Press, p. 298-303.

Maor, E. (2018). *Music by the numbers: From Pythagoras to Schoenberg*. New Jersey: Princeton University Press.

Rivolo; M. T.; Simi, A. (1998). «Il calcolo delle radici quadrate e cubiche in Italia da Fibonacci a Bombelli». *Archive for History of Exact Sciences*, 52, p. 161-193.

Romero Vallhonesta F.; Massa-Esteve, M. R. (2015). «Història de les matemàtiques per a l'ensenyament de les matemàtiques. Analitzant les fonts». A: Grapí, P.; Massa-Esteve, M. R. (ed.). *Actes de la XIII Jornada per a la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, p. 59-70.